BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

ĐỖ LÂN

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA MỘT SỐ HỆ VI PHÂN ĐA TRỊ TRONG KHÔNG GIAN VÔ HẠN CHIỀU

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62 46 01 03

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2016

Luận án được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Trần Đình Kế

Phản biện 1: GS.TSKH. Đinh Nho Hào, Viện Toán học

Phản biện 2: PGS.TS. Hoàng Quốc Toàn, Trường Đại học KHTN - ĐHQG Hà Nội

Phản biện 3: PGS.TS. Nguyễn Sinh Bảy, Trường Đại học Thương Mại

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội vào hồi .... giờ .... ngày .... tháng .... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện: Thư viện Quốc Gia, Hà Nội hoặc Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Mở đầu

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Thuật ngữ hệ vi phân đa trị được dùng để chỉ các bài toán với bao hàm thức vi phân hoặc các phương trình vi phân (đạo hàm riêng) mà tính duy nhất nghiệm của nó bị phá vỡ. Các hệ vi phân đa trị không chỉ là mô hình tổng quát của phương trình vi phân, nó xuất phát từ nhiều bài toán quan trọng, trong đó có thể kể đến bài toán điều khiển phản hồi đa trị, bài toán chính quy hóa phương trình vi phân với phần phi tuyến không liên tục, các bất đẳng thức vi biến phân. Nghiên cứu dáng điệu nghiệm của bao hàm thức tiến hóa trong phạm vi luận án này bao gồm các câu hỏi về tính ổn định (hoặc ổn định yếu) của nghiệm, sự tồn tại tập hút của hệ động lực sinh bởi tập nghiệm và các lớp nghiệm đặc biệt (nghiệm đối tuần hoàn, nghiệm phân rã).

Các bao hàm thức tiến hóa trong các không gian hữu hạn chiều đã được nghiên cứu từ khá sớm. Các kết quả về tính giải được và cấu trúc tập nghiệm đã được trình bày một cách hệ thống trong tài liệu chuyên khảo của Deimling (1992). Tiếp đó, các bao hàm thức tiến hóa trong không gian Banach và ứng dụng của nó trở thành chủ đề nghiên cứu thời sự trong hơn một thập kỷ qua (xem các cuốn chuyên khảo của Tolstonogov (2000) và Kamenskii et al. (2001)).

Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm là một trong những vấn đề trung tâm của lí thuyết định tính phương trình vi tích phân. Đối với các phương trình vi phân thường, lí thuyết ổn định Lyapunov là công cụ hữu hiệu. Trong khi đó, để nghiên cứu dáng điệu nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng, người ta thường sử dụng lí thuyết tập hút toàn cục.

Các kết quả cùng với lược đồ nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình đã được phát triển cho các bao hàm

thức. Do tính chất không duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy ứng với bao hàm thức tiến hóa, lí thuyết ổn định Lyapunov không khả dụng trong việc nghiên cứu tính ổn định của nghiệm dừng. Đối với các bao hàm thức tiến hóa trong không gian hữu hạn chiều, khái niệm ổn định yếu đã được đề xuất bởi Filippov năm 1988. Đối với các bao hàm thức tiến hóa trong không gian vô hạn chiều, cách tiếp cận thường được sử dụng nhất là lí thuyết tập hút.

Trong vài thập kỷ trở lại đây, lí thuyết tập hút toàn cục phát triển mạnh và thu được nhiều kết quả có tính hệ thống (có thể xem các tài liệu chuyên khảo của Raugel (2002) và Babin (2006)). Đối với các hệ vi phân đa trị, lí thuyết tập hút cũng tương đối hoàn thiện với nhiều lược đồ nghiên cứu, trong đó, đáng chú ý nhất là lí thuyết nửa dòng đa trị của Melnik và Valero đưa ra năm 1998 cùng với lí thuyết nửa dòng suy rộng của Ball (1997). Những đánh giá, so sánh về hai phương pháp này đã được Caraballo (2003) phân tích kỹ. Sau đó lí thuyết tập hút lùi, tập hút đều cho các hệ động lực đa trị cũng được xây dựng để làm việc với các hệ vi phân không ô-tô-nôm (xem Caraballo và Valero (1998, 2003), Melnik và Valero (2000)). Đặc biệt, trong các năm 2014-2015, những cải tiến đáng kể cho lí thuyết tập hút đã được Kalita và các cộng sự công bố. Những kết quả mới nhất này tập trung vào việc giảm nhẹ điều kiện về tính liên tục và đưa ra tiêu chuẩn compact tiệm cận cho nửa nhóm/nửa quá trình dựa trên độ đo không compact. Tuy nhiên những tiêu chuẩn này khi áp dụng cho các hệ vi phân hàm còn gặp phải nhiều khó khăn về mặt kỹ thuật do không gian pha tương ứng có cấu trúc phức tạp.

Trong luận án này, sử dụng lược đồ của Melnik và Valero, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa

trị sinh bởi lớp bao hàm thức nửa tuyến tính

$$u'(t) \in Au(t) + F(u(t), u_t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \tag{2}$$

ở đây u là hàm nhận giá trị trong không gian Banach X, u_t là hàm trễ, tức là $u_t(s) = u(t+s)$ với $s \in [-h, 0]$, F là một hàm đa trị xác định trên một tập con của $X \times C([-h, 0]; X)$. Đối với lớp bài toán này, chúng ta xét $A : D(A) \subset X \to X$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida mà $\overline{D(A)} \neq X$.

Trong luận án, bên cạnh lớp bao hàm thức tiến hóa bậc nhất, chúng tôi nghiên cứu một lớp bao hàm thức tiến hóa bậc phân số $\alpha \in (0, 1)$ với mục tiêu tìm ra các điều kiện chấp nhận được cho tính ổn định của nghiệm dừng. Tuy nhiên với các phương trình/bao hàm thức tiến hóa bậc phân số, cách tiếp cận của lí thuyết tập hút lại không khả dụng khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm do toán tử nghiệm không có tính chất kiểu nửa nhóm. Hơn nữa, với các bao hàm thức tiến hóa bậc phân số, các khái niệm ổn định theo nghĩa Lyapunov cũng không thể áp dụng được. Do đó, chúng tôi đưa ra khái niệm *Ổn định tiệm cận yếu* của nghiệm tầm thường khi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số có xung, với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn dạng

$$D_0^\alpha u(t) \in Au(t) + F(t, u(t), u_t), \ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{3}$$

$$\Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \tag{4}$$

$$u(s) + g(u)(s) = \varphi(s), \ s \in [-h, 0], \tag{5}$$

trong đó $D_0^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, là đạo hàm bậc phân số theo nghĩa Caputo, A là một toán tử tuyến tính đóng trong X sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $W(\cdot)$, $F : \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h, 0]; X) \to \mathcal{P}(X)$ là một ánh xạ đa trị, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $k \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, I_k

và g là các hàm liên tục, u_t là hàm trễ theo thời gian t, tức là $u_t(s) = u(t+s), s \in [-h, 0]$.

Hệ (3)-(5) là tổng quát hóa của bài toán Cauchy có xung và điều kiện không cục bộ mô tả bởi (4) và (5). Một số trường hợp riêng của bài toán này đã được nghiên cứu rộng rãi, ví dụ như trường hợp F là ánh xạ đơn trị hay trường hợp $g = 0$. Trong các mô hình thực tế, điều kiện không cục bộ cho những mô tả tốt hơn so với điều kiện ban đầu cổ điển, ví dụ, điều kiện

$$u(s) + \sum_{i=1}^{M} c_i u(\tau_i + s) = \varphi(s), s \in [-h, 0],$$

cho ta thêm các đo đạc tại các thời điểm khác thời điểm ban đầu. Mặt khác, điều kiện xung (4) được sử dụng để mô tả các hệ động lực có sự thay đổi đột ngột, thường gặp trong vật lí, sinh học, kĩ thuật, các lĩnh vực y tế...

Đặc biệt, trong một vài năm gần đây, một số trường hợp riêng của bài toán (3)-(5) dưới dạng bao hàm thức được nghiên cứu rộng rãi. Tuy nhiên, sự quan tâm chủ yếu dành cho các câu hỏi về sự tồn tại, tính chất tập nghiệm và bài toán điều khiển, còn lại một trong những câu hỏi quan trọng nhất của lớp bài toán dạng (3)-(5), đó là tính ổn định của nghiệm, lại gần như chưa được biết tới.

Trong nghiên cứu định tính các hệ vi tích phân, cùng với lí thuyết ổn định, việc tìm các lớp nghiệm đặc biệt, ví dụ như nghiệm tuần hoàn, đối tuần hoàn cũng là hướng nghiên cứu thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Nghiệm đối tuần hoàn của các hệ vi phân được sử dụng trong nhiều quá trình vật lí (có thể xem trong các công trình của Batchelor (1995), Bonilla (1995), Kulshreshtha (1993). Một số kết quả về sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho các lớp phương trình tiến hóa tuyến tính và nửa tuyến tính đã được thiết lập, bắt nguồn từ các nghiên cứu của Okochi (1988, 1990). Theo hướng này, ta có kể kể tới các kết quả

tiêu biểu của Haraux (1989), Liu (2010), Wang (2010). Năm 2012, bằng cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm, Liu chứng minh được sự tồn tại của nghiệm tích phân đối tuần hoàn cho lớp bài toán dạng

$$u'(t) + Au(t) = f(t, u(t)), t \in \mathbb{R},$$
$$u(t+T) = -u(t), t \in \mathbb{R},$$

trong đó, A sinh ra một C_0-nửa nhóm có tính chất hyperbolic. Từ đây, một loạt các kết quả tương tự cho các bài toán trừu tượng trong không gian Banach đã được chứng minh theo cách tiếp cận của lí thuyết nửa nhóm. Điển hình có thể kể tới các kết quả của Wang và Chen (2013), Oregan (2012), N'Guérékata và V. Valmorin (2012), Liu(2014, 2015).

Tuy nhiên, các kết quả tương tự cho các bao hàm thức tiến hóa thì còn ít được biết đến. Đồng thời, nghiệm có tính chất đối tuần hoàn cũng là một kiểu dáng điệu đặc biệt của nghiệm. Do đó, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm đối tuần hoàn cho lớp bao hàm thức vi phân dạng đa diện

$$u'(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$
$$u(t+T) = -u(t), t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

trong đó, $F(t, u(t)) = \overline{\text{conv}}\{f_1(t, u(t)), \cdots, f_n(t, u(t))\}$; A là toán tử Hille-Yosida có miền xác định $D(A)$ không trù mật sao cho A sinh ra nửa nhóm hyperbolic trong $\overline{D(A)}$. Như ta đã biết, trong các bài toán điều khiển phản hồi, biến điều khiển thường được lấy trong một miền có dạng đa diện. Ngoài ra các hệ vi phân với F có dạng đa diện cho phép mô tả tính "không chắc chắn" của ngoại lực, vì vậy, bài toán (6)-(7) là một bài toán có ý nghĩa khoa học và ứng dụng.

2. Mục đích – Đối tượng – Phạm vi nghiên cứu của luận án

Mục đích của luận án là nghiên cứu tính giải được cũng như dáng điệu tiệm cận nghiệm của một số lớp hệ vi phân đa trị trong không gian vô hạn chiều theo cách tiếp cận của lí thuyết ổn định và lí thuyết tập hút.

Đối tượng nghiên cứu cụ thể của luận án là hai lớp bao hàm thức vi phân nửa tuyến tính cấp một và cấp phân số $\alpha \in (0, 1)$. Phạm vi nghiên cứu của luận án bao gồm những nội dung sau:

- **Nội dung 1:** Nghiên cứu tính giải được và sự tồn tại tập hút toàn cục cho lớp bao hàm thức vi phân mà phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân.

- **Nội dung 2:** Nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm đối tuần hoàn cho lớp bao hàm thức vi phân dạng đa diện mà phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân có tính chất hyperbolic.

- **Nội dung 3:** Nghiên cứu tính giải được trên nửa trục và tính ổn định yếu cho lớp bao hàm thức bậc phân số có xung, với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn. Trong trường hợp đơn trị, nghiên cứu tính duy nhất của nghiệm phân rã.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu tính giải được của các lớp bài toán phi tuyến, chúng tôi sử dụng phương pháp nửa nhóm, phương pháp ước lượng theo độ đo không compact và các định lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị nén, kết hợp với các công cụ của giải tích đa trị, giải tích bậc phân số.

- Để nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị, chúng tôi sử dụng lược đồ của Melnik và Valero.

- Để nghiên cứu tính ổn định của bao hàm thức vi phân bậc phân số, chúng tôi sử dụng các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén.

4. Cấu trúc và các kết quả của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình đã công bố và Tài liệu tham khảo, luận án được chia làm bốn chương:

- Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị.* Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các kết quả về lí thuyết nửa nhóm, lí thuyết độ đo không compact (MNC) và ánh xạ nén, các kiến thức về giải tích bậc phân số và tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị.

- Chương 2: *Dáng điệu tiệm cận nghiệm của một lớp bao hàm thức vi phân hàm nửa tuyến tính.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính giải được và sự tồn tại tập hút toàn cục cho một lớp bao hàm thức vi phân với trễ hữu hạn mà phần tuyến tính của nó sinh ra một nửa nhóm tích phân.

- Chương 3: *Nghiệm đối tuần hoàn của bao hàm thức vi phân nửa tuyến tính.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho lớp bao hàm thức vi phân dạng đa diện mà phần tuyến tính sinh ra một nửa nhóm tích phân có tính chất hyperbolic.

- Chương 4: *Tính ổn định yếu của hệ vi phân bậc phân số nửa tuyến tính.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính giải được trên nửa trục và tính ổn định yếu của nghiệm không cho một lớp bao hàm thức bậc phân số, có xung, với trễ hữu hạn và điều kiện không cục bộ. Trong trường hợp bài toán đơn trị, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm phân rã.

Chương 1
Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị bao gồm: Các không gian hàm; lí thuyết nửa nhóm; lí thuyết về độ đo không compact; các định lý điểm bất động cho ánh xạ đa trị; lí thuyết tập hút cho nửa dòng đa trị và các kiến thức về giải tích bậc phân số.

1.1. Các không gian hàm

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số không gian hàm và một số không gian hàm phụ thuộc thời gian sử dụng trong luận án.

1.2. Lí thuyết nửa nhóm

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kiến thức cơ bản về lí thuyết nửa nhóm và một số nửa nhóm thường gặp. Đặc biệt, chúng tôi trình bày các kiến thức về lí thuyết nửa nhóm tích phân.

1.3. Độ đo không compact (MNC) và các ước lượng độ đo

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại các định nghĩa và các tính chất cơ bản của độ đo không compact, trong đó đặc biệt quan tâm tới độ đo Hausdorff. Sau đó, chúng tôi trình bày các một số ước lượng độ đo mà sẽ phải dùng để đánh giá trong các chương sau.

1.4. Ánh xạ nén và các định lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị

Trong mục này, chúng tôi trình bày lí thuyết về ánh xạ nén và các định lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị mà chúng tôi sẽ dùng trong các chương sau.

1.5. Tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại lí thuyết nửa dòng đa trị của Melnik và Valero (1998) cùng với lược đồ chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị.

1.6. Giải tích bậc phân số

Trong mục này, chúng tôi trình bày lại các khái niệm về tích phân, đạo hàm bậc phân số theo nghĩa Caputo. Sau đó, chúng tôi đưa ra công thức nghiệm tích phân cho bài toán phương trình vi phân bậc phân số.

Chương 2
DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA MỘT LỚP BAO HÀM THỨC VI PHÂN HÀM NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu hệ động lực sinh bởi một lớp bao hàm thức vi phân mà thành phần tuyến tính sinh ra một nửa nhóm tích phân. Ở đây, chúng tôi sử dụng các kĩ thuật ước lượng cho độ đo không compact để chứng minh tính giải được toàn cục và sự tồn tại tập hút toàn cục cho nửa dòng đa trị sinh bởi hệ. Kết quả này của chúng tôi là sự tổng quát hóa một số kết quả gần đây về hướng nghiên cứu này.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [2] trong Danh mục các công trình đã công bố của luận án.

2.1. Đặt bài toán

Với $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, xét bài toán

$$u'(t) \in Au(t) + F(u(t), u_t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$u(s) = \varphi(s), \quad s \in [-h, 0], \tag{2.2}$$

ở đây u là hàm nhận giá trị trong X, u_t là hàm trễ, tức là $u_t(s) = u(t+s)$ với $s \in [-h, 0]$, F là một hàm đa trị xác định trên một tập con của $X \times C([-h, 0]; X)$, toán tử $A : D(A) \subset X \to X$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida với miền xác định không trù mật, sinh ra nửa nhóm tích phân $\{S'(t)\}$.

2.2. Sự tồn tại nghiệm tích phân

Ta ký hiệu

$$\mathcal{P}_c(X) = \{D \in \mathcal{P}(X) : D \text{ là tập đóng}\},$$

$$\mathcal{C}_h = \{\varphi \in C([-h, 0]; X) : \varphi(0) \in \overline{D(A)}\},$$

$$\mathcal{C}_\varphi = \{v : J \to \overline{D(A)}, v \in C(J, X), v(0) = \varphi(0)\}.$$

Với $v \in \mathcal{C}_\varphi$, ta kí hiệu $v[\varphi] \in C([-h, T], X)$ như sau

$$v[\varphi](t) = \begin{cases} v(t) \text{ nếu } t \in [0, T] \\ \varphi(t) \text{ nếu } t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Xét các giả thiết:

(**A**) *Toán tử A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida và C_0-nửa nhóm $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ liên tục theo chuẩn.*

(**F**) *Hàm đa trị $F : \overline{D(A)} \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{P}_c(X)$ thỏa mãn:*
(1) F là nửa liên tục trên với giá trị compact yếu, lồi;
(2) $\|F(x, y)\| := \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(x, y)\} \leq a\|x\| + b\|y\|_{\mathcal{C}_h} + c$, với mọi $x \in \overline{D(A)}$, $y \in \mathcal{C}_h$, ở đây $a, b, c > 0$;
(3) nếu $S'(\cdot)$ không compact thì $\chi(F(B, C)) \leq p\chi(B) + q \sup\limits_{t\in[-h,0]} \chi(C(t))$, với $p, q \in \mathbb{R}^+$ và mọi $B \subset \overline{D(A)}, C \subset \mathcal{C}_h$.

Đặt $\mathcal{P}_F(v) = \{f \in L^1(J; X) : f(t) \in F(v(t), v[\varphi]_t)$, hầu khắp $t \in J\}$. Ta có định nghĩa nghiệm tích phân của bài toán (2.1)-(2.2).

Định nghĩa 2.1. *Với $\varphi \in \mathcal{C}_h$ cho trước, hàm $u : [-h, T] \to X$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán* (2.1)-(2.2) *trên $[-h, T]$ với điều kiện ban đầu φ nếu tồn tại $f \in \mathcal{P}_F(u)$ sao cho*

$$u(t) = \begin{cases} S'(t)\varphi(0) + \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_0^t S'(t-s)\lambda(\lambda I - A)^{-1} f(s)ds, t \geq 0, \\ \varphi(t), t \in [-h, 0]. \end{cases}$$

Sử dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị, ta chứng minh được kết quả sau đây về sự tồn tại nghiệm tích phân.

Định lí 2.2. *Giả sử* (**A**) *và* (**F**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (2.1)-(2.2) *luôn có nghiệm tích phân với mỗi $\varphi \in \mathcal{C}_h$ cho trước.*

2.3. Sự tồn tại tập hút toàn cục

Ta định nghĩa nửa dòng đa trị sinh bởi (2.1)-(2.2) như sau

$G : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_h)$,
$G(t, \varphi) = \{u_t : u[\varphi]$ là một nghiệm tích phân của $(2.1) - (2.2)\}$.

Để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục, ta giả thiết:

(S) Tồn tại $\alpha, \beta > 0, N \geq 1$ sao cho

$$\|S'(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\alpha t},\ \|S'(t)\|_{\chi} \leq Ne^{-\beta t}, \forall t > 0.$$

Với giả thiết trên, ta chứng minh được định lí.

Định lí 2.3. *Giả sử* (**A**), (**F**) *và* (**S**) *thỏa mãn. Khi đó, nửa dòng đa trị G có một tập hút toàn cục compact với điều kiện*

$$\min\{\alpha - (a + b), \beta - 4N(p + q)\} > 0.$$

2.4. Ví dụ áp dụng

2.4.1. Bao hàm thức trong miền bị chặn

Giả sử Ω là một tập bị chặn, mở trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn $\partial\Omega$ và $\mathcal{O} \subset \Omega$ là một tập con mở. Xét bài toán (I) sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta_x u(t, x) + \lambda u(t, x) = f(x, u(t, x)) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) v_i(t), x \in \Omega, t > 0,$$

$$v_i(t) \in \left[\int_{\mathcal{O}} k_{1,i}(y) u(t - h, y) dy, \int_{\mathcal{O}} k_{2,i}(y) u(t - h, y) dy\right], 1 \leq i \leq m,$$

$$u(t, x) = 0,\ x \in \partial\Omega, t \geq 0,$$

$$u(s, x) = \varphi(s, x),\ x \in \Omega, s \in [-h, 0],$$

trong đó $\lambda > 0$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục thỏa mãn $|f(x, r)| \leq a(x)|r| + b(x), \forall x \in \Omega, r \in \mathbb{R}$, $b_i \in C(\overline{\Omega}), k_{j,i} \in L^1(\mathcal{O})$

với $i \in \{1, ..., m\}, j = 1, 2$, và $\varphi \in \mathcal{C}_h = C([-h, 0]; C(\overline{\Omega}))$. Xét

$$X = C(\overline{\Omega}), \quad X_0 = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

với chuẩn $\sup \|v\| = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$, ta thấy $A = \Delta - \lambda I$ sinh ra một nửa nhóm co, compact và giải tích $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ trên X_0.

Từ Định lí 2.3, nửa dòng sinh bởi bài toán (I) có một tập hút toàn cục compact trong $C([-h, 0]; C(\overline{\Omega}))$ với điều kiện

$$\|a\| + \sum_{i=1}^{m} \|b_i\| \max\{\int_{\mathcal{O}} |k_{1,i}(y)|dy; \int_{\mathcal{O}} |k_{2,i}(y)|dy\} < \lambda.$$

2.4.2. Bao hàm thức trong miền không bị chặn

Xét bài toán (II) sau với $\Omega = \mathbb{R}^n$ và $\mathcal{O}$ là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta_x u(t, x) + \lambda u(t, x) = f(x, u(t, x)) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)v_i(t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

$$v_i(t) \in \left[\int_{\mathcal{O}} k_{1,i}(y)u(t-h, y)dy, \int_{\mathcal{O}} k_{2,i}(y)u(t-h, y)dy\right], 1 \leq i \leq m,$$

$$u(s, x) = \varphi(s, x), \ x \in \mathbb{R}^n, s \in [-h, 0].$$

Với bài toán này, ta giả thiết

1) $b_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $k_{j,i} \in L^2(\mathcal{O}), j = 1, 2; 1 \leq i \leq m$ và $\varphi \in C([-h, 0]; L^2(\mathbb{R}^n))$;

2) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(\cdot, z)$ là đo được với mỗi $z \in \mathbb{R}$ và tồn tại $\kappa \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mà

$$|f(x, z_1) - f(x, z_2)| \leq \kappa(x)|z_1 - z_2|, \forall x \in \mathbb{R}^n, z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Với $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ thì $A = \Delta - \lambda I$ sinh ra nửa nhóm ổn định mũ và χ-giảm với số mũ λ. Như vậy, nửa dòng đa trị sinh bởi bài toán (II) có tập hút toàn cục compact trong $C([-h, 0]; L^2(\mathbb{R}^n))$ nếu

$$\max\{4\|\kappa\|, \|\kappa\| + \sum_{i=1}^{m} \|b_i\| \max\{\|k_{1,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}, \|k_{2,i}\|_{L^2(\mathcal{O})}\} < \lambda.$$

Chương 3
NGHIỆM ĐỐI TUẦN HOÀN CỦA BAO HÀM THỨC VI PHÂN NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn cho một lớp bao hàm thức vi phân hàm có dạng đa diện mà phần tuyến tính của nó sinh ra một nửa nhóm tích phân có tính chất hyperbolic.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [4] trong Danh mục các công trình đã công bố của luận án.

3.1. Đặt bài toán

Với $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn của bài toán sau

$$u'(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

$$u(t+T) = -u(t), t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

trong đó, $F(t, u(t)) = \overline{\text{conv}}\{f_1(t, u(t)), \cdots, f_n(t, u(t))\}$, với $\overline{\text{conv}}$ là ký hiệu bao lồi đóng; A là toán tử Hille-Yosida có miền xác định $D(A)$ mà $\overline{D(A)} \neq X$ và thành phần A trong $\overline{D(A)}$ sinh ra một nửa nhóm hyperbolic.

3.2. Sự tồn tại của nghiệm đối tuần hoàn

Ký hiệu $P_{TA}(\mathbb{R}; X) = \{u \in BC(\mathbb{R}; X) : u(t+T) = -u(t)\}$, ta có $P_{TA}(\mathbb{R}, X)$ cùng với chuẩn sup là một không gian Banach.
Ta giả thiết:

(**A**) *Toán tử A thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida. Hơn nữa, $\{S'(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm hyperbolic.*

(**F**) *Các hàm $f_i : \mathbb{R} \times \overline{D(A)} \to X, i = 1, \cdots, n$ thỏa mãn:*

(1) *$f_i(\cdot, x)$ đo được mạnh, với mọi $x \in \overline{D(A)}$ và $f_i(t, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$;*

(2) $\|f_i(t,x)\| \leq m(t)(\|x\|+1)$, $\forall x \in \overline{D(A)}$, *với* $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$;

(3) *nếu $\{S'(t)\}$ không compact, thì $\chi(f_i(t,B)) \leq k(t)\chi(B)$, với mọi tập bị chặn $B \subset \overline{D(A)}$, trong đó $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$,*

(4) *$f_i(t+T, -x) = -f_i(t,x)$ với mọi $x \in \overline{D(A)}$.*

Định nghĩa 3.1. *Một nghiệm tích phân của bài toán* (3.1)-(3.2) *là một hàm $u \in P_{TA}(\mathbb{R}, X)$ thỏa mãn*

$$u(t) = S'(t-s)u(s) + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_s^t S'(t-s) R_\lambda f(s) ds,$$

trong đó $R_\lambda = \lambda(\lambda I - A)^{-1}$, với mọi $t > s$ và $s \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{P}_F^{TA}(u)$.

Sử dụng đinh lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị, ta chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán (3.1)-(3.2).

Định lí 3.2. *Giả sử rằng* (**A**) *và* (**F**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (3.1)-(3.2) *có ít nhất một nghiệm tích phân với điều kiện*

$$\frac{2N}{1 - e^{-\delta T}} \int_0^T m(s) ds < 1. \tag{3.3}$$

3.3. Áp dụng

3.3.1. Ví dụ 1

Với Ω là một tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn, xét bài toán

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta_x u(t,x) + \lambda u(t,x) = f(t,x,u(t,x)), x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

$$f(t,x) \in [f_1(t,x,u(t,x))); f_2(t,x,u(t,x))], \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

$$u(t+T) = -u(t), \qquad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.6}$$

$$u(t,x) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \partial\Omega, \tag{3.7}$$

với Δ_x là toán tử Laplace với biến x, $\lambda > 0$.

Tương tự Ví dụ 1, mục 2.5, ta xét

$$X = C(\overline{\Omega}), \quad X_0 = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

với chuẩn $\|v\| = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|$.
Xét $f_i : \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$, với $i = 1, 2$, xác định bởi

$$f_i(t, v)(x) = \tilde{f}_i(t, x, v(x)),$$

trong đó, các hàm $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

(H1) $\tilde{f}_i(\cdot, x, z)$ là đo được với mọi $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$; $\tilde{f}_i(t, \cdot, z)$ liên tục với mỗi $t, z \in \mathbb{R}$, và $\tilde{f}_i(t, x, \cdot)$ liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$ và $x \in \Omega$;

(H2) $|\tilde{f}_i(t, x, z)| \leq m(t)(|z| + 1)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$, trong đó $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$;

(H3) $\tilde{f}_i(t + T, x, -z) = -\tilde{f}_i(t, x, z)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$.

Với các giả thiết này, bài toán (3.4)-(3.7) chính là một mô hình của bài toán ban đầu, và nó có nghiệm với điều kiện

$$\frac{2}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^T m(s)ds < 1.$$

3.3.2. Ví dụ 2

Ta xét bài toán

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{k,l=1}^{M} \partial_k(a_{kl}(x)\partial_l)u(t, x) + a_0(x)u(t, x) + f(t, x, u(t, x)),$$

$$x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

$$f(t, x) \in [f_1(t, x, u(t, x))); f_2(t, x, u(t, x))], \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

$$u(t + T) = -u(t), \qquad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k,l=1}^{M} n_k(x)a_{kl}(x)\partial_l u(t, x) = 0, \ t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega. \tag{3.11}$$

Ở đây, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 và $n(x)$ là véc tơ đơn vị hướng ngoài. Ta giả thiết:

$$a_{kl} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad k, l = 1, \cdots, M; \quad a_0 \in L^M(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

với $\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)v_k v_l \geq \eta|v|^2$, trong đó $\eta > 0, x \in \overline{\Omega}, v \in \mathbb{R}^n$.
Với $X = L^p(\Omega), 1 < p < \infty$, xét $A(x, D) := \sum_{k,l=1}^{M} \partial_k(a_{kl}(x)\partial_l) + a_0(x)$, với miền xác định

$$D(A) := \big\{f \in \bigcap_{p>1} W^{2,p}(\Omega) : \\ A(\cdot, D)f \in C(\overline{\Omega}), \sum_{k,l=1}^{M} n_k(\cdot)a_{kl}(\cdot)\partial_l f = 0 \text{ trên } \partial\Omega\big\}.$$

Từ kết quả của Schnaubelt (2001), ta có A sinh ra một nửa nhóm hyperbolic $T(\cdot)$ trên X với các hệ số M, λ.
Với $i = 1, 2$, xét $f_i : \mathbb{R} \times L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$, mà $f_i(t, v)(x) = \tilde{f}_i(t, x, v(x))$, trong đó $\tilde{f}_i : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

(H4) $\tilde{f}_i(\cdot, \cdot, z)$ đo được với mỗi $z \in \mathbb{R}$ và $\tilde{f}_i(t, x, \cdot)$ liên tục với hầu khắp $t \in \mathbb{R}$ và $x \in \Omega$;

(H5) $|\tilde{f}_i(t, x, z)| \leq \tilde{m}(t)(|z| + 1)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$, trong đó $\tilde{m} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$;

(H6) $|\tilde{f}_i(t, x, z) - \tilde{f}_i(t, x, z')| \leq k(t)|z - z'|$, với $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^+)$,

(H7) $\tilde{f}_i(t + T, x, -z) = -\tilde{f}_i(t, x, z)$, với mọi $t, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$.

Khi đó, ta có kết quả sau đây:

Định lí 3.3. *Bài toán* (3.8)-(3.11) *có nghiệm $T-$đối tuần hoàn với điều kiện*

$$\frac{2M}{1 - e^{-\lambda T}} \int_0^T \tilde{m}(s)ds < 1.$$

Chương 4
TÍNH ỔN ĐỊNH YẾU CỦA HỆ VI PHÂN BẬC PHÂN SỐ NỬA TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng tôi đưa ra khái niệm ổn định tiệm cận yếu của nghiệm tầm thường của bài toán bao hàm thức tiến hóa bậc phân số, từ đó chứng minh tính ổn định yếu của bài toán bao hàm thức bậc phân số có xung, với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [1] và [3] trong Danh mục các công trình đã công bố của luận án.

4.1. Đặt bài toán

Với $(X, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach, xét bài toán

$$ {}^{C}D_0^{\alpha}u(t) \in Au(t) + F(t, u(t), u_t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \Lambda, \tag{4.1}$$

$$\Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \tag{4.2}$$

$$u(s) + g(u)(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0], \tag{4.3}$$

trong đó $D_0^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$, là đạo hàm Caputo bậc α, A là một toán tử tuyến tính đóng trong X sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $W(\cdot)$, F là một hàm đa trị, $\Delta u(t_k) = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $k \in \Lambda \subset \mathbb{N}; \inf_{k\in\Lambda}(t_{k+1} - t_k) > 0$. Ở đây, u_t là hàm trễ theo thời gian t.

Ký hiệu $\Sigma(\varphi)$ là tập nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) ứng với điều kiện ban đầu φ sao cho $0 \in \Sigma(0)$. Nghiệm không của bài toán (4.1)-(4.3) được gọi là ổn định tiệm cận yếu nếu nó là

1) *ổn định*: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $\|\varphi\|_h < \delta$ thì $\|u_t\|_h < \epsilon$ với mọi $u \in \Sigma(\varphi)$, ở đây $\|\cdot\|_h$ ký hiệu chuẩn sup trong $C([-h, 0]; X)$;

2) *hút yếu*: với mọi $\varphi \in \mathcal{B}$, tồn tại $u \in \Sigma(\varphi)$ thỏa mãn $\|u_t\|_h \to 0$ khi $t \to +\infty$.

4.2. Không gian hàm và độ đo

Xét $\mathcal{E} = PC(J;X)$ là không gian các hàm xác định và liên tục từng khúc trên $J \subset \mathbb{R}$ và nhận giá trị trong X. Trong trường hợp $J = [-h, +\infty)$, ta xét

$$PC_\varrho([-h,+\infty);X) = \{u \in PC([-h,+\infty);X) : \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{\varrho(t)} = 0\},$$

trong đó $\varrho : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty)$ là một hàm liên tục và không giảm. Ta có $PC_\varrho([-h,+\infty);X)$ cùng với chuẩn

$$\|u\|_\varrho = \sup_{t\in[-h,0]} \|u(t)\| + \sup_{t\geq 0} \frac{\|u(t)\|}{\varrho(t)},$$

là một không gian Banach. Tuy nhiên, trong PC_ϱ, chúng ta không xác định và tính toán được độ đo Hausdorff, do đó, ta phải xây dựng một độ đo chính quy trên PC_ϱ như sau:

$$\chi^*(D) = \sup_{T>0} \chi_{PC}(\pi_T(D)) + \lim_{T\to+\infty} \sup_{u\in D} \sup_{t\geq T} \frac{\|u(t)\|}{\varrho(t)}, \tag{4.4}$$

trong đó, $D \subset PC_\varrho$ và $\pi_T(u)$ là hạn chế của u trên $[-h,T]$.

4.3. Sự tồn tại nghiệm trên nửa trục

Trong mục này, ta xét $\varrho(t) = e^{\delta t}$ với $\delta > 0$ và giả thiết:

*(**A**) C_0-nửa nhóm $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A là liên tục theo chuẩn và $\|W(t)x\| \leq M_A\|x\|, \forall t \geq 0, x \in X$.*

*(**F**) Hàm phi tuyến $F : \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h,0];X) \to X$ thỏa mãn:*
1) $F(\cdot, v, w)$ là nửa liên tục trên với mỗi $t \in \mathbb{R}^+$;
2) ánh xạ $t \mapsto F(t, u(t), u_t)$ có hàm chọn đo được mạnh với mỗi $u \in PC_\varrho$;
3) $\exists m \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ sao cho: $\forall (t,v,w) \in \mathbb{R}^+ \times X \times C([-h,0];X)$:

$$\|F(t,v,w)\| = \sup\{\|\xi\| : \xi \in F(t,v,w)\} \leq m(t)(\|v\| + \|w\|_h),$$

4) nếu $W(\cdot)$ không compact, tồn tại $k \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ sao cho

$$\chi(F(t,V,W)) \le k(t)\left[\chi(V) + \sup_{t\in[-h,0]} \chi(W(t))\right],$$

với hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+$, và mọi $V \in \mathcal{B}(X), W \in \mathcal{B}(C([-h,0];X))$.

(G) *Hàm $g : PC_\varrho \to C([-h,0];X)$ liên tục và thỏa mãn*
1) $\|g(u)\|_h \le \Psi_g(\|u\|_\varrho)$ với mọi $u \in PC_\varrho$, trong đó Ψ_g là một hàm xác định trên $\mathbb{R}^+$;
2) $\exists \eta \ge 0$ sao cho $\chi_h(g(D)) \le \eta \cdot \chi_\infty(D)$ với mọi $D \in \mathbb{B}(PC_\varrho)$, χ_h là độ đo Hausdorff trong $C([-h,0];X)$.

(I) *Hàm $I_k : X \to X, k \in \Lambda$, liên tục và thỏa mãn:*
1) tồn tại dãy không âm $\{l_k\}_{k\in\Lambda} : \sum_{k\in\Lambda} l_k < \infty$ và

$$\|I_k(x)\| \le l_k \|x\|, \text{ với mọi } x \in X, k \in \Lambda;$$

2) tồn tại dãy không âm $\{\mu_k\}_{k\in\Lambda}$ sao cho với $\forall B \in \mathcal{B}(X)$

$$\chi(I_k(B)) \le \mu_k \chi(B).$$

Với $u \in PC_\varrho$, đặt

$$\mathcal{P}^p_F(u) = \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+;X) : f(t) \in F(t,u(t),u_t) \text{ hầu khắp } t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Định nghĩa 4.1. *Hàm $u : [-h,+\infty) \to X$ được gọi là một nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) nếu $u(t) + g(u)(t) = \varphi(t)$ với $t \in [-h,0]$, và tồn tại $f \in \mathcal{P}^p_F(u)$ sao cho với $t > 0$,*

$$u(t) = S_\alpha(t)[\varphi(0) - g(u)(0)] + \sum_{0<t_k<t} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k)) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds,$$

Ta có định lí sau đây.

Định lí 4.2. *Với $\sigma \in (0,1)$, giả sử*

$$(1+M_A)\liminf_{r\to+\infty}\frac{\Psi_g(r)}{r} + M_A\sum_{k\in\Lambda} l_k + 2\sup_{t>0}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|m(s)}{\varrho(t-s)}ds < 1,$$

$$\ell = \eta M_A + M_A\sum_{k\in\Lambda}\mu_k + 8\sup_{t\geq 0}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|_\chi k(s)ds < 1,$$

$$\vartheta = \sup_{t>0}\int_0^{\sigma t}\frac{\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}m(s)ds < \infty,$$

$$\kappa = \sup_{t>0}\int_{\sigma t}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|}{\varrho(t-s)}m(s)ds < \frac{1}{2},$$

Khi đó, bài toán (4.1)-(4.3) luôn có nghiệm tích phân trong PC_ϱ.

4.4. Tính ổn định yếu

Ta thay (**A**), (**F**) and (**G**) bởi các giả thiết mạnh hơn:

*(**A***) Nửa nhóm $W(\cdot)$ là liên tục theo chuẩn và $\exists\beta > 0$ sao cho*

$$\|W(t)x\| \leq M_A e^{-\beta t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in X.$$

*(**F***) Hàm phi tuyến F thỏa mãn (**F**) với $m \in L^1(\mathbb{R}^+)\cap L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$.*

*(**G***) Hàm không cục bộ g thỏa mãn (**G**) với $\Psi_g(r) = \nu\cdot r, \forall r \geq 0$, ν là một hằng số dương.*

Định lí 4.3. *Giả sử (**A***), (**F***), (**G***) và (**I**) thỏa mãn. Khi đó, nghiệm không của bài toán là ổn định tiệm cận yếu nếu*

$$\ell = \eta M_A + M_A\sum_{k\in\Lambda}\mu_k + 8\sup_{t\geq 0}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|_\chi k(s)ds < 1,$$

$$\varpi = (1+M_A)\nu + M_A\sum_{k\in\Lambda} l_k + 2\sup_{t>0}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|m(s)ds < 1.$$

4.5. Áp dụng

Xét hệ vi phân lưới:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}u_i(t) = (Au(t))_i + f_i(t),\ t > 0, t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

$$f_i(t) \in [f_{1i}(t, u_i(t), u_i(t-\rho(t))), f_{2i}(t, u_i(t), u_i(t-\rho(t)))], \tag{4.6}$$

$$\Delta u_i(t_k) = I_{ik}(u_i(t_k)), \tag{4.7}$$

$$u_i(s) + \sum_{j=1}^{N} c_j u_i(\tau_j + s) = \varphi_i(s), s \in [-h, 0], \tau_j > 0, \tag{4.8}$$

trong đó $u = (u_i) : [-h, +\infty) \to \ell^2$, $\dfrac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ là đạo hàm Caputo bậc $\alpha \in (0,1)$, $A : \ell^2 \to \ell^2$ với $(Av)_i = v_{i+1} - (2+\lambda)v_i + v_{i-1},\ v \in \ell^2$,$\rho : \mathbb{R}^+ \to [0, h]$ là một hàm liên tục, λ là một số dương. Ở đây ℓ^2 là không gian các dãy $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ thỏa mãn $\sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i^2 < \infty$. Ta xét các giả thiết:

(N1) Các hàm $f_{1i}, f_{2i} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}$, liên tục và thỏa mãn

$$\max\{|f_{1i}(t, y, z)|^2, |f_{2i}(t, y, z)|^2\} \leq m^2(t)(|y|^2 + |z|^2),$$

với mọi $(t, \eta, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, trong đó $m \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$, $m(t) \leq \frac{C_m}{1+t^{\alpha+1}}$ với $C_m > 0$.

(N2) Các hàm $I_{ik} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$, là các hàm liên tục và

$$|I_{ik}(y)| \leq l_k |y|,$$

với $\{l_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là một dãy không âm thỏa mãn $\sum_{k\in\mathbb{N}} l_k < \infty$.

Với các điều kiện (N1), (N2) thỏa mãn, ta thu được tính ổn định tiệm cận yếu của nghiệm không của hệ (4.5)-(4.8).

4.6. Trường hợp bài toán đơn trị

Xét một trường hợp đặc biệt của bài toán (4.1)-(4.3), khi F là hàm đơn trị, ký hiệu là f. Khi đó, bài toán trở thành

$$^{C}D_0^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t, u(t), u_s),\ t \neq t_k, t_k \in (0, +\infty), k \in \Lambda, \tag{4.9}$$

$$\Delta u(t_k) = I_k(u(t_k)), \tag{4.10}$$

$$u(s) + g(u)(s) = \varphi(s),\ s \in [-h, 0]. \tag{4.11}$$

Đối với bài toán đơn trị này, ta giả thiết:

*(**Aa**) Nửa nhóm $W(\cdot)$ là liên tục theo chuẩn và $\exists \beta > 0$ sao cho*

$$\|W(t)x\| \leq M_A e^{-\beta t}\|x\|, \forall t \geq 0, x \in X.$$

*(**Fa**) $f(\cdot, v, w)$ đo được với mỗi $v \in X$, $f(t, \cdot, \cdot)$ liên tục hầu khắp $t \in \mathbb{R}^+, f(t, 0, 0) = 0$, và $\exists k \in L^p(\mathbb{R}^+), p > \frac{1}{\alpha}$ thỏa mãn*

$$||f(t, v_1, w_1) - f(t, v_2, w_2)|| \leq k(t)(||v_1 - v_2|| - ||w_1 - w_2||_h), t \in \mathbb{R}^+,$$

với mọi $v_1, v_2 \in X, w_1, w_2 \in C([-h, 0]; X)$.

*(**Ga**) g là một hàm liên tục thỏa mãn $g(0) = 0$ và $\exists \eta > 0$ để*

$$||g(w_1) - g(w_2)||_h \leq \eta||w_1 - w_2||_\infty, \forall w_1, w_2 \in \mathcal{PC}_0$$

*(**Ia**) $I_k, k \in \Lambda$, liên tục, $I_k(0) = 0$ và tồn tại dãy $\{\mu_k\}_{k\in\Lambda}$ mà*

$$||I_k(x) - I_k(y)|| \leq \mu_k||x - y||, \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Áp dụng nguyên lí ánh xạ co Banach, ta thu được định lí sau:

Định lí 4.4. *Giả sử* (**A**), (**Fa**), (**Ga**), (**Ia**) *và* (**R**) *thỏa mãn. Khi đó, bài toán* (4.9)-(4.11) *có duy nhất nghiệm $\|u(t)\| = o(1)$ nếu*

$$\Big(\eta + \sum_{k\in\Lambda} \mu_k\Big) M_A + 2\sup_{t\geq 0} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|P_\alpha(t-s)\|k(s)ds < 1.$$

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này chúng tôi đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của một số hệ vi phân đa trị trong không gian vô hạn chiều. Luận án đã đạt được các kết quả sau:

1) Đối với lớp bao hàm thức vi phân có trễ hữu hạn mà phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân: Chứng minh tính giải được toàn cục và sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa dòng đa trị sinh bởi bài toán.

2) Đối với lớp bao hàm thức vi phân dạng đa diện, phần tuyến tính sinh ra nửa nhóm tích phân có tính chất hyperbolic: Chứng minh được sự tồn tại nghiệm đối tuần hoàn.

3) Đối với lớp bao hàm thức vi phân bậc phân số, có xung, với điều kiện không cục bộ và trễ hữu hạn: Chứng minh được tính giải được trên nửa trục và tính ổn định tiệm cận yếu. Trong trường hợp phần phi tuyến đơn trị, chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm phân rã.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu:

1) Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của một số lớp bao hàm thức với trễ biến thiên hoặc trễ vô hạn cùng với các vấn đề liên quan như tính chính qui của nghiệm, tính trơn của tập hút, tính ổn định trong thời gian hữu hạn của nghiệm.

2) Nghiên cứu sự tồn tại của các lớp nghiệm đặc biệt như nghiệm tuần hoàn, đối tuần hoàn, nghiệm tối ưu của một số lớp bao hàm thức không có cấu trúc đa diện.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN

1) T.D. Ke, D. Lan, Decay integral solutions for a class of Impulsive Fractional differential equations in Banach spaces, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, Volume 17, Number 1 (2014) 96-121.

2) T.D. Ke, D. Lan, Global attractor for a class of functional differential inclusions with Hille–Yosida operators, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, Volume 103 (2014) 72–86

3) T.D. Ke, D. Lan, Generalized Cauchy problem governed by fractional differential inclusions on the half line, *submitted*

4) T.D. Ke, D. Lan, Existence of Anti-periodic solutions for a class of polytope differential inclusions with Hille-Yosida operators, *submitted*

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

1) Đại hội Toán học toàn quốc, Nha Trang, 2013;

2) Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

3) Xêmina Tối ưu và điều khiển, Viện Toán học.

4) Xêmina Lí luyết định tính phương trình vi phân, Bộ môn Toán cơ bản, Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách Khoa Hà Nội.

5) Xêmina của phòng Phương trình vi phân, Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.